

# Корпоративные финансы

## Лекция 4. «Финансовая математика. Дополнительные критерии эффективности»



Москва, 2017

# Дополнительные критерии эффективности

Для предварительно оценки инвестиционных решений и анализа деятельности компании, как правило, применяются основные критерии экономической эффективности: **NPV**, **IRR**, **PP**, **DPP**, **ANPV** и **DPI**, но для формирования окончательного выбора стратегии их недостаточно. При глубоком анализе приходится погружаться в более сложные критерии. Они – так или иначе – связаны с концепцией Альтернативных издержек.

- **Duration** (Macaulay Duration), **Дюрация**;
- **MNPV** (Modified Net Present Value), **Модифицированная Текущая/Приведенная стоимость**;
- **MIRR** (Modified Internal Rate of Return), **Модифицированная внутренняя норма доходности**;
- **NFV** (Net Future Value), **Чистая будущая стоимость**;
- **NRR** (Net Rate of Return), **Чистая/Маржинальная норма доходности**;
- **MNRR** (Modified Net Rate of Return), **Модифицированная Чистая норма доходности**;
- **NTV** (Net Terminal Value), **Чистая терминальная стоимость**.

# Дюрация - Duration

Дополнительная техника, используемая для принятия инвестиционных решений, вычисление **Дюрации** Маколея (**Macauley Duration**). Разница между Дюрацией и похожими на нее критериями выглядит следующим образом:

## **Период окупаемости - Payback.**

Не принимает во внимание концепцию стоимости денег во времени, а также денежные потоки за рамками рассматриваемого денежного периода (по окончании проекта). Но, естественно, используется в качестве грубого фильтра для инвестиционных решений.

## **Период окупаемости - Discounted**

**Payback.** Преодолевает недостатки РВР, но не может решить проблему правильной идентификации инвестиции с высокими денежными потоками в начале проекта и с негативным cash flow после точки окупаемости.

**Дюрация - Duration** вычисляет среднее время реального полного возврата инвестиции при заданной ставке дисконтирования и сопоставляет влияние ставки дисконтирования на окупаемость проекта. Дюрация учитывает и концепцию стоимости денег во времени и денежные потоки, приходящиеся на период после точки окупаемости.

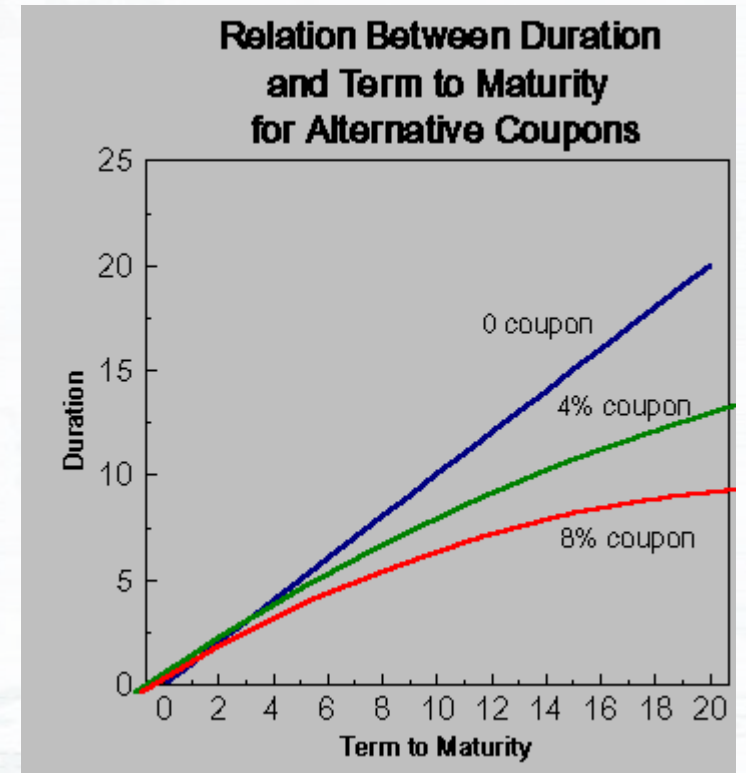
# Дюрация - Duration

Концепция, лежащая в основе вычисления **Дюрации** – достаточно неочевидна для понимания. Она демонстрирует дополнительные характеристики реальной точки окупаемости инвестиции в зависимости от уровня ставки дисконтирования.

Формула для вычисления Дюрации, Duration (**D**), с заданными будущими денежными потоками для каждого периода времени **t** (среди **n** периодов), начиная с года № 1 (**CF<sub>t</sub>**), инвестициями для каждого периода (**I<sub>t</sub>**) и ставкой дисконтирования (**r**):

$$\text{Duration (D)} = \frac{\sum_{t=1}^n \left[ t \times \frac{CF_t}{(1+r)^t} \right]}{\sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+r)^t}}$$

*Чем больше денежный поток в будущем тем больший вес он имеет.*



Самый легкий путь для понимания сущности дюрации – проанализировать эту характеристику для облигаций с разной ставкой купона.



# Дюрация - Duration

D (Duration), Дюрация	Ставка	Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Всего за период
NCF (Net Cash Flow) after tax Чистый денежный поток после налога	12%	-500,00	100,00	200,00	300,00	400,00	500,00	1 500,00
Номер периода			1	2	3	4	5	
DCF, умноженный на Номер периода (Y1 - считается периодом № 1)		-500,00	89,29	318,88	640,60	1 016,83	1 418,57	3 484,16
DCF, начиная с периода Y1	12%		89,29	159,44	213,53	254,21	283,71	1 000,18
								<b>3,48</b>

**Дюрация** не может быть вычислена, когда денежные потоки, начиная с периода №1, разнонаправлены.

Дюрация обязательно рассчитывается, когда инвестиция **финансируется заемными средствами**. В этом случае дюрация денежного потока, генерируемого инвестицией, должна быть выше отрицательного денежного потока по выплатам долга. Дюрация – мера эластичности доходности денежного потока от инвестиции по отношению к процентной ставке и периоду привлечения долговых обязательств, за счет которых она финансируется.



Frederic Macauley  
1882 – 1970.

# Дюрация - Duration

D (Duration), Дюрация	Ставка	Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Всего за период
<b>NCF (Net Cash Flow) after tax</b> Чистый денежный поток после налога	12%	-500,00	100,00	200,00	300,00	400,00	500,00	1 500,00
<b>D (Duration),</b> Дюрация	12%							3,48
<b>DPP (Discounted Payback Period).</b> Дисконтированный период окупаемости. <i>Доходы поступают равномерно внутри года</i>	12%							3,15
<b>PP (Payback Period).</b> Период окупаемости. <i>Доходы поступают равномерно внутри года</i>								2,67

Арифметически значение **Дюрации** более критично оценивает проект, чем значения Обычного и Дисконтированного периодов окупаемости.

Но практическая ценность этого инструмента состоит в сопоставлении сроков дюрации сроков выплат долга и дюрации денежного потока, генерируемого инвестицией.



# Модифицированная Чистая текущая стоимость - Modified Net Present Value

Современная, более продвинутая, чем NPV, техника, используемая для принятия инвестиционных решений – **Модифицированная Чистая приведенная стоимость** (**Modified NPV (MNPV)**), Modified Net Present Worth (MNPW). MNPV дает возможность оценить инвестицию в сравнении с другими альтернативными направлениями вложения денежных средств.

Формула для вычисления Модифицированной Приведенной текущей стоимости, Modified Net Present Value (**MNPV**), с заданными будущими денежными потоками для каждого периода времени **t** (среди **n** периодов), начиная с года № 1 ( $CF_t$ ), инвестициями для каждого периода ( $I_t$ ), ставкой реинвестирования (**d**) и ставкой дисконтирования (**r**):

$$MNPV = \frac{\sum_{t=1}^n CF_t \times (1 + d)^{n-t}}{(1 + r)^n} - \sum_{t=0}^n \frac{I_t}{(1 + r)^t}$$





# Модифицированная Чистая текущая стоимость - Modified Net Present Value

MNPV (Modified Net Present Value), Модифицированная Чистая текущая стоимость	Ставка								Всего за период
		Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5		
<b>NCF (Net Cash Flow) after tax</b> Чистый денежный поток после налога		<b>-5 000,00</b>	<b>3 845,00</b>	<b>-300,00</b>	<b>6 920,17</b>	<b>8 690,93</b>	<b>10 477,06</b>	<b>24 633,16</b>	
Номер периода		0	1	2	3	4	5		
<b>Discount factor (Дисконт-фактор, Фактор дисконтирования)</b>	<b>12%</b>	1,00	0,89	0,80	0,71	0,64	0,57		
<b>Ставка реинвестирования (Compound factor)</b>	<b>10%</b>	1,61	1,46	1,33	1,21	1,10	1,00		
Реинвестированные денежные потоки, в те периоды, когда денежный поток - <b>ПОЗИТИВНЫЙ</b>		<b>0,00</b>	<b>5 629,46</b>	<b>0,00</b>	<b>8 373,40</b>	<b>9 560,03</b>	<b>10 477,06</b>	<b>34 039,95</b>	
Initial Investment (Outlay) Discounted - дисконтированные <b>НЕГАТИВНЫЕ</b> денежные потоки среди всех периодов, начиная с Y0 (включительно)		<b>-5 000,00</b>	<b>0,00</b>	<b>-239,16</b>	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>	<b>-5 239,16</b>	
Дисконтированная сумма <b>ПОЗИТИВНЫХ</b> денежных потоков		Здесь применяется фактор: $(1 + \text{Ставка дисконтирования})^{\text{Общее количество периодов}}$						<b>19 315,18</b>	
<b>MNPV (Modified Net Present Value)</b>								<b>14 076,03</b>	

# Модифицированная внутренняя норма доходности - Modified Internal Rate of Return

Принятие **Modified NPV (MNPV)** в качестве одного из инструментов для анализа инвестиционных решений, сразу порождает идею **Модифицированной внутренней нормы доходности, Modified Internal Rate of Return (MIRR)**, RIRR (Reinvestment-rate adjusted Internal Rate of Return). Но, сразу возникает желание обойти проблемы, существующие с обычной **IRR** (ее множественность, отсутствие в определенных случаях). Поэтому формула для вычисления **MIRR** – кардинально иная:

Формула для вычисления Модифицированной внутренней ставке доходности, Modified Internal Rate of Return (**MIRR**), с заданными будущими денежными потоками для каждого периода времени **t** (среди **n** периодов), начиная с года № 1 (**CF<sub>t</sub>**), инвестициями для каждого периода (**I<sub>t</sub>**), ставкой реинвестирования (**d**) и ставкой дисконтирования (**r**):

$$\mathbf{MIRR:} \sum_{t=0}^n \frac{I_t}{(1+r)^t} = \frac{\sum_{t=1}^n CF_t \times (1+d)^{n-t}}{(1+MIRR)^n} \quad \text{или}$$

$$MIRR = \sqrt[n]{\frac{FV \text{ (positive cash flow, reinvestment rate)}}{-PV \text{ (negative cash flow, hurdle rate)}} - 1}$$

# Модифицированная внутренняя норма доходности - Modified Internal Rate of Return

MIRR (Modified Internal Rate of Return), Модифицированная Внутренняя норма доходности	Ставка								Всего за период
		Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5		
<b>NCF (Net Cash Flow) after tax</b> Чистый денежный поток после налога		<b>-5 000,00</b>	3 845,00	<b>-300,00</b>	6 920,17	8 690,93	10 477,06	<b>24 633,16</b>	
Номер периода		0	1	2	3	4	5		
<i>Discount factor (Дисконт-фактор, Фактор дисконтирования)</i>	<b>12%</b>	1,00	0,89	0,80	0,71	0,64	0,57		
<i>Ставка реинвестирования (Compound factor)</i>	<b>10%</b>	1,61	1,46	1,33	1,21	1,10	1,00		
Реинвестированные денежные потоки, в те периоды, когда денежный поток - <b>ПОЗИТИВНЫЙ</b>		0,00	5 629,46	0,00	8 373,40	9 560,03	10 477,06	<b>34 039,95</b>	
Initial Investment (Outlay) Discounted - дисконтированные <b>НЕГАТИВНЫЕ</b> денежные потоки среди всех периодов, начиная с Y0 (включительно)		5 000	0	239	0	0	0	<b>5 239,16</b>	
<b>MIRR (Modified Internal Rate of Return),</b> Модифицированная Внутренняя норма доходности		=(Реинвестированные ПОЗИТИВНЫЕ денежные потоки/Дисконтированные НЕГАТИВНЫЕ денежные потоки)^(1/Количество периодов)-1						<b>45,394%</b>	

# Модифицированная внутренняя норма доходности - Modified Internal Rate of Return

**MIRR (Modified Internal Rate of Return),**  
Модифицированная Внутренняя норма  
доходности

Вычисляется с использованием функции "МВСД", English version "MIRR"

**45,394%**

Поскольку ставка дисконтирования может также выступать и ставкой реинвестирования, например, в мультипликацию того же проекта, часто рассчитывают и «MIRR по ставке дисконтирования».

**MIRR Ставка дисконтирования**  
(Модифицированная Внутренняя норма  
доходности с реинвестицией под Ставку  
дисконтирования)

12%

**46,156%**

# Специальный случай: XNPV & XIRR

Excel дает специальный инструмент для вычисления NPV и IRR денежных потоков для неравных по времени периодов. Эти функции именуются **XNPV** и **XIRR**.

XNPV, специальная функция для вычисления NPV для нерегулярных периодов	Ставка							Всего за период
		Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	
NCF (Net Cash Flow) after tax Чистый денежный поток после налога		-5 000	-3 845	-300	6 920	-8 691	10 477	-438,71
Даты транзакций		19.08.2016	21.09.2016	25.09.2016	30.09.2016	07.10.2016	19.10.2016	
XNPV, специальная функция для вычисления NPV для нерегулярных периодов		Вычисляется с использованием функции "ЧИСТНЗ", English version "XNPV"						-551,09

Формула для вычисления **XNPV** и **XIRR** с заданными будущими денежными потоками для каждого периода  $d_t$  (среди  $n$  периодов), начиная с периода №1 ( $CF_t$ ), инвестиции для каждого периода ( $I_t$ ) и ставки дисконтирования ( $r$ ):

$$XNPV = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+r)^{\frac{d_t-d_1}{365}}}; \quad XIRR: 0 = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+XIRR)^{\frac{d_t-d_1}{365}}}$$



# Специальный случай: XNPV & XIRR

Excel дает специальный инструмент для вычисления NPV и IRR денежных потоков для неравных по времени периодов. Эти функции именуются **XNPV** и **XIRR**.

<b>XIRR</b> , специальная функция для вычисления IRR для нерегулярных периодов	Ставка	Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Всего за период
<b>NCF (Net Cash Flow) after tax</b> Чистый денежный поток после налога		<b>-5 000</b>	<b>-3 845</b>	<b>-300</b>	<b>6 920</b>	<b>-8 691</b>	<b>10 477</b>	<b>-438,71</b>
Даты транзакций		19.08.2016	21.09.2016	25.09.2016	30.09.2016	07.10.2016	19.10.2016	
<b>XIRR</b> , специальная функция для вычисления IRR для нерегулярных периодов		Вычисляется с использованием функции "ЧИСТВНДОХ", English version "XIRR"						<b>-34,307%</b>



# Чистая будущая стоимость - Net Future Value

Для понимания эффективности инвестиции мы вычисляем **NPV**, как стоимость будущих денежных потоков, приведенную к сегодняшнему дню. Для того чтобы вычислить, сколько денежного потока в абсолютном значении будет соответствовать сегодняшнему NPV в будущем применяется **Чистая будущая стоимость - Net Future Value (NFV)**. Она показывает, сколько денег мы получим в будущем, если сегодня сразу проинвестируем сумму NPV под заданную процентную ставку.

Формула для вычисления Чистой будущей стоимости, Net Future Value (**NFV**), с заданными будущими денежными потоками для каждого периода **t** (среди **n** периодов), начиная с года № 1 (**CF<sub>t</sub>**), инвестициями для каждого периода (**I<sub>t</sub>**) ставкой дисконтирования (**r**):

$$NFV = \sum_{t=0}^n CF_t \times (1 + r)^t$$

или

$$NFV = NPV \times (1 + r)^n$$

# Чистая будущая стоимость - Net Future Value

**Net Future Value (NFV)** ВЫЧИСЛЕНИЕ:

NFV (Net Future Value), Чистая будущая стоимость	Ставка	Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Всего за период
NCF (Net Cash Flow) after tax Чистый денежный поток после налога		-500	100	200	300	400	500	1 000,00
NPV (только для ПОЗИТИВНЫХ денежных потоков)			89,29	159,44	213,53	254,21	283,71	1 000,18
Номер периода			1	2	3	4	5	5
Hurdle rate and Compound factor	12%	1,0000	1,1200	1,2544	1,4049	1,5735	1,7623	
NFV (Net Future Value), Чистая будущая стоимость			157	281	376	448	500	1 762,66

Инвестируем  
на 4 года

Инвестируем  
на 3 года

Инвестируем  
на 2 года

Инвестируем  
на 1 год

Инвестируем  
на 0 лет

С **негативными** денежными потоками после года **Y1 NFV** не может быть вычислен корректно.

# Чистая/маржинальная норма доходности

## - Net Rate of Return

Чистая норма доходности, **Net Rate of Return (NRR)** – средний уровень доходности, используемый наравне с Дисконтированным индексом доходности, Discounted Profitability Index (DPI)/Benefit to Cost Ratio (BCR). Отражает доходность инвестиции по отношению к дисконтированному отрицательному денежному потоку (в абсолютной величине), создаваемому инвестиционными вложениями.

Формула для вычисления Чистой нормы доходности, Net Rate of Return (**NRR**), с заданными будущими денежными потоками для каждого периода времени **t** (среди **n** периодов), начиная с года № 1 (**CF<sub>t</sub>**), инвестициями для каждого периода (**I<sub>t</sub>**) и ставкой дисконтирования (**r**):

$$NRR = \frac{NPV}{\left| \sum_{t=0}^n \frac{I_t}{(1+r)^t} \right| (\text{модуль})} \times 100\%$$

или

$$NRR = (1 - DPI) \times 100\%$$

# Чистая/маржинальная норма доходности - Net Rate of Return

<b>NRR (Net Rate of Return), Чистая/маржинальная норма доходности</b>	<b>Ставка</b>	<b>Y0</b>	<b>Y1</b>	<b>Y2</b>	<b>Y3</b>	<b>Y4</b>	<b>Y5</b>	<b>Всего за период</b>
Cumulative DCF = NPV, Аккумулированный дисконтированный денежный поток	12%	-5 000,00	-1 566,96	-1 806,12	3 119,52	8 642,76	14 587,73	14 587,73
Initial Investment (Outlay) Discounted - дисконтированные <b>НЕГАТИВНЫЕ</b> денежные потоки среди всех периодов, начиная с Y0 (включительно)		-5 000,00	0,00	-239,16	0,00	0,00	0,00	-5 239,16

**NRR (Net Rate of Return)**

278,44%

**DPI (Discounted Profitability Index)**

$$NRR = (1 - DPI) \times 100\%$$

3,7844

**NRR** является производной (не в математическом смысле) от **DPI**, но иногда используется самостоятельно, поскольку может соотнести NPV и размер начальной инвестиции.



# Модифицированная Чистая/маржинальная норма доходности – Modified Net Rate of Return

**Модифицированная Чистая/маржинальная норма доходности Modified Net Rate of Return (MNRR)** является аналогом Net Rate of Return (NRR), который вычисляется с использованием Модифицированной (то есть, реинвестированной) MNPV вместо обычной. MNRR представляет собой дисконтированный денежный поток, который реинвестируется под ставку, отличную от ставки дисконтирования, по отношению к дисконтированному суммарному размеру инвестиции.

Формула для вычисления Модифицированной Чистой нормы доходности, Modified Net Rate of Return (**MNRR**), с заданными будущими денежными потоками для каждого периода времени **t** (среди **n** периодов), начиная с года № 1 ( $CF_t$ ), инвестициями для каждого периода ( $I_t$ ) и ставкой дисконтирования (**r**):

$$MNRR = \frac{MNPV}{\sum_{t=0}^n \frac{I_t}{(1+r)^t}} \times 100\%$$

# Модифицированная Чистая/маржинальная норма доходности – Modified Net Rate of Return

<b>MNRR (Modified Net Rate of Return)</b> Модифицированная Чистая норма доходности	Ставка								Всего за период
		Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5		
<b>MNPV (Modified Net Present Value),</b> Модифицированная Чистая текущая СТОИМОСТЬ								14 076,03	
Initial Investment (Outlay) Discounted - дисконтированные <b>НЕГАТИВНЫЕ</b> денежные потоки среди всех периодов, начиная с Y0 (включительно)		-5 000	0	-239	0	0	0	<b>-5 239,16</b>	

**MNRR (Modified Net Rate of Return)**

**268,67%**

# Чистая терминальная стоимость - Net Terminal Value

**Чистая терминальная стоимость - Net Terminal Value (NTV)** отражает стоимость инвестиции/проекта/компании за горизонтом прогнозирования, то есть оценку всех будущих денежных потоков с заданным **Темпом роста** (предполагающимся навсегда). Конечно, данный вид оценки не принимает во внимание многочисленных рисков глобальной/страновой/региональной экономики и ее отдельных сегментов, и, соответственно, вряд ли может быть признан однозначным. Но сама логика дает возможность делать сопоставимые оценки.

Формула для вычисления Чистой терминальной стоимости, Net Terminal Value (**NTV**), с заданным будущим денежным потоком для последнего периода прогнозирования – года № **t** (**CF<sub>t</sub>**), уровнем роста для последующих лет (**g**) и ставкой дисконтирования (**r**) (Формула Гордона):

$$NTV = \frac{CF_t \times (1 + g)}{(r - g)}$$



# Оценка компании/проекта, основанная на Net Terminal Value

Оценка компании, основанная на WACC в качестве ставки дисконтирования								
CF (Cash Flow), прямой недисконтированный денежный поток		-5 000	3 525	-651	6 909	8 967	11 226	24 976,39
WACC (Weighted Average Cost of Capital), Средневзвешенная стоимость капитала		25,00%	17,31%	18,59%	17,62%	16,67%	15,90%	18,52%
Net Terminal Value (NTV), Чистая терминальная стоимость								49 485,70
Ставка дисконтирования	18,52%							
Темп роста компании/проекта	5%							
Номер периода		1	2	3	4	5	6	
Дисконт-фактор (специальная ставка)		0,9186	0,7751	0,6540	0,5518	0,4656	0,3928	
Дисконтированный Cash Flow (специальная ставка)		-4 592,84	2 732,07	-425,73	3 812,32	4 174,94	4 410,21	10 110,97
Стоимость компании								29 551,15

Оценка компании ( $V$ ), основанная на Чистой терминальной стоимости, Net Terminal Value (NTV), с заданными будущими денежными потоками для каждого периода  $t$  (среди  $n$  периодов), начиная с года № 1 ( $CF_t$ ), ставкой дисконтирования ( $r$ ):

$$V = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{(1+r)^{t-0,5}} + \frac{NTV}{(1+r)^{n-0,5}}$$



# Множественные ставки дисконтирования и наращенния

<p><b>DPI</b> с плавающей ставкой дисконтирования</p>		$DPI = \frac{\sum_{t=0}^n \frac{CF_t}{\prod_{i=1}^t (1 + r_i)}}{\sum_{t=0}^n \frac{I_t}{\prod_{i=1}^t (1 + r_i)}}$
<p><b>DPP</b> с плавающей ставкой дисконтирования</p>	$DPP = n, \text{ где } \sum_{t=1}^n \frac{I_t}{\prod_{i=1}^t (1 + r_i)} > I_0$	
<p><b>Duration</b> с плавающей ставкой дисконтирования</p>		$Duration = \frac{\sum_{t=1}^n t \times PV_t}{\sum_{t=1}^n PV_t}, \text{ где } PV_t = \frac{CF_t}{\prod_{i=1}^t (1 + r_i)}$
<p><b>MIRR</b> по плавающей ставке дисконта (с реинвестированием под плавающую ставку дисконтирования)</p>	$MIRR_{\text{плав ставка дисконта}}: \sum_{t=0}^n \frac{I_t}{\prod_{i=0}^t (1 + r_i)} = \frac{\sum_{t=1}^n CF_t \times \prod_{i=1}^{n-t} (1 + r_{i+1})}{(1 + MIRR_{\text{плав ставка дисконта}})^n}$	
<p><b>MIRR</b> по фиксированной ставке дисконта (с реинвестированием под фиксированную ставку дисконтирования)</p>	$MIRR_{\text{фикс ставка дисконта}}: \sum_{t=0}^n \frac{I_t}{(1 + r)^t} = \frac{\sum_{t=1}^n CF_t \times (1 + r)^{n-t}}{(1 + MIRR_{\text{фикс ставка дисконта}})^n}$	
<p><b>MNPV</b> с плавающей ставкой дисконтирования</p>		$MNPV = \frac{\sum_{t=1}^n CF_t \times \prod_{i=1}^{n-t} (1 + d_{i+1})}{\prod_{t=1}^n (1 + r_t)} - \sum_{t=0}^n \frac{I_t}{\prod_{i=0}^t (1 + r_i)}$
<p><b>NPV</b> с плавающей ставкой дисконтирования</p>	$NPV = \sum_{t=1}^n \frac{CF_t}{\prod_{i=1}^t (1 + r_i)} - \sum_{t=0}^n \frac{I_t}{\prod_{i=0}^t (1 + r_i)}$	